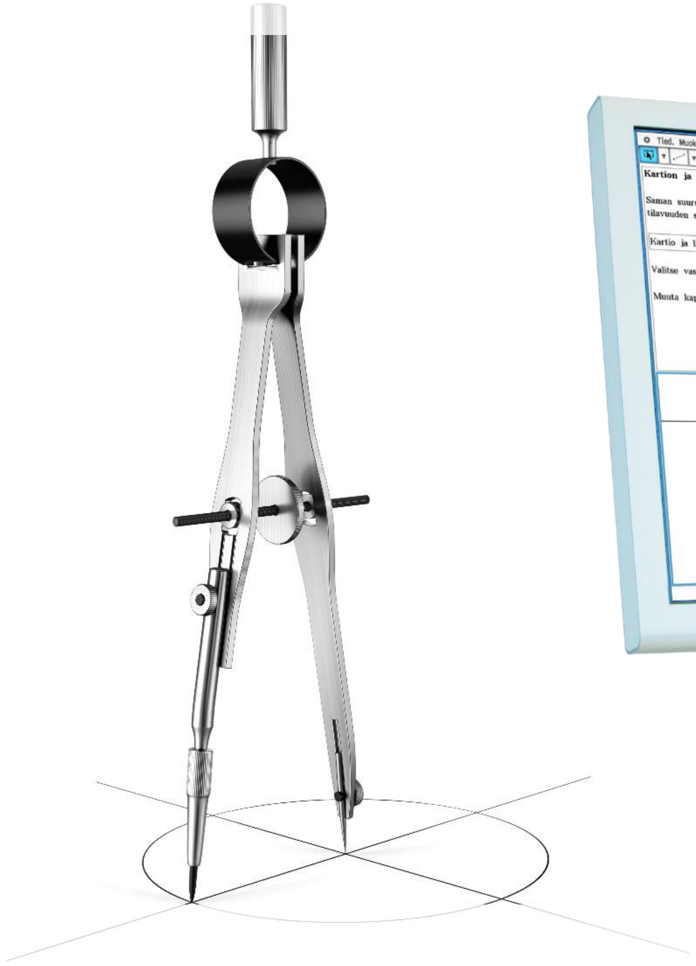
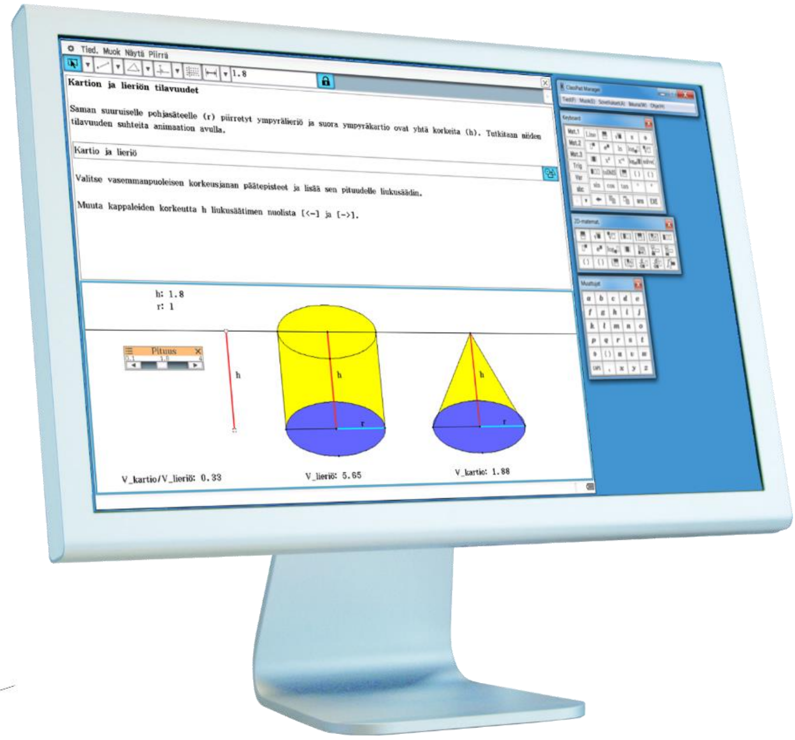
Laske Laudatur Casion avulla

Pitkä matematiikka,
syksy 2024





Sisältö

Syksyn 2024 matematiikan yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavan ja Abitista löytyvän ClassPad Managerin avulla laskettuina.

Pepe Palovaara

CASIO

Fintegrity

FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä

26.9.2024

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on kuusi tehtävää, joista vastataan viiteen. B1-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on kolme tehtävää, joista vastataan kahteen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 6 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Useimmissa tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

A-osa

Vastaa viiteen tehtävään.

1. Peruslaskuja 12 p.

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen osatehtävän vastaus on kokonaisluku.

1.1 Laske. 2 p.

Juna lähtee Oulusta kello 9.48 ja on perillä Helsingissä kello 15.25. Junamatkan kesto on 5 1 p. tuntia ja 37 1 p. minuuttia.

1.2 Laske. 2 p.

Harrin palkka on $4\,200$ euroa kuukaudessa. Hänen palkastaan vähennetään 33 % ennakonpidätystä, joka sisältää pakolliset eläke- ja työttömyysvakuutusmaksut. Harrin nettopalkka euron tarkkuudella on 2814 euroa.

1.3 Laske. 2 p.

Alma maksaa kuukaudessa 12 euron ennakkomaksun vedenkäytöstään. Kuuden kuukauden välein isännöitsijä lähettää todelliseen kulutukseen perustuvan tasauslaskun, jossa on jo huomioitu maksetut ennakkomaksut. Tammi–kesäkuussa Alman veden kulutus oli $17{,}012\ \mathrm{m}^3$, ja veden hinta on $4{,}63$ euroa/m^3. Alman tammi–kesäkuun tasauslaskun loppusumma kokonaisiksi euroiksi pyöristettynä on 7 euroa.

1.4 Laske. **2 p.**

Kokeiden arvostelu kestää kolmelta opettajalta yhteensä 12 tuntia. Neljältä opettajalta samaan urakkaan menisi $\boxed{9}$ tuntia. Jokainen opettaja arvostelee kokeensa itsenäisesti ja samalla nopeudella.

1.5 Laske. **2 p.**

Yhtälön $|x-1|=3$ negatiivinen ratkaisu on $x=\boxed{-2}$.

1.6 Laske. **2 p.**

Vektoreiden $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}$ ja $\bar{b}=2\bar{i}+8\bar{j}$ pistetulo on $\bar{a}\cdot\bar{b}=\boxed{38}$.

2. Derivaattoja 12 p.

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

2.1 Määritä luvun $p'(1)$ tarkka arvo, kun $p(x)=-2x^5+x^4-2$. **3 p.**

$p'(1)=\boxed{-6}$

2.2 Määritä derivaatta $f'(x)$, kun $f(x)=xe^x$. **3 p.**

$f'(x)=\boxed{(x+1)e^x}$

2.3 Määritä luvun $g'(-1)$ tarkka arvo, kun $g(x)=\ln(2x+3)$. **3 p.**

$g'(-1)=\boxed{2}$

2.4 Määritä derivaatta $h'(x)$, kun $h(x)=\sin x+\cos(3x)$. **3 p.**

$h'(x)=\boxed{\cos(x)-3\sin(3x)}$

3. Yhtälöt 12 p.

Ratkaise muuttujien x ja y tarkat arvot seuraavista yhtälöistä.

1. Yhtälö $4\cdot 8^x=\sqrt{2}$. **(4 p.)**
2. Yhtälö $\sin(6y-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$, kun $y\in[0,\frac{\pi}{2}]$. **(8 p.)**

1. $$4\cdot 8^x=\sqrt{2}\Leftrightarrow 8^x=\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow \ln 8^x=\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\Leftrightarrow x\cdot\ln 8=\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\Leftrightarrow x=\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{\ln 8}=\frac{\ln\sqrt{2}-\ln 4}{\ln 8}$$

$$=\frac{\ln 2^{\frac{1}{2}}-\ln 2^2}{\ln 2^3}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2-2\ln 2}{3\ln 2}=\frac{\frac{1}{2}-2}{3}=\frac{-\frac{3}{2}}{3}=-\frac{1}{2}$$

Vaihtoehtoinen tapa on muokata yhtälöä puolittain.

1. $4 \cdot 8^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^2 \cdot 2^{3x} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2+3x} = 2^{\frac{1}{2}}$ Koska kantaluvut ovat puolittain samat, riittää verrata eksponentteja.

$2 + 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

2. $\sin\left(6y - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 6y - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \vee 6y - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 6y = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \vee 6y = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{\pi}{3} \vee y = \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{\pi}{3}$

Annetulle välille vastauksista kuuluuvat $\frac{\pi}{9}$ ja $\frac{2\pi}{9}$ ja $\frac{4\pi}{9}$.

4. Integraali 12 p.

Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ arvo $f(x)$ on luvun x kokonaislukuosa. Esimerkiksi $f(1) = 1$, $f(\frac{11}{5}) = 2$ ja $f(\pi) = 3$. Laske

$$\int_0^{10} f(x)\, dx.$$

$\int_0^{10} f(x)\, dx$ on käyrän ja x-akselin jäävä pinta-ala, koska positiivisilla muuttujan arvoilla funktio saa vain positiivisia arvoja. Integraalin arvo on $1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 9 = 0 + 2 + \ldots + 9 = 45$

5. Summan arviointi 12 p.

1. Osoita, että $\frac{k-1}{k2^k+1} < \frac{1}{2^k}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k. **(4 p.)**
2. Osoita, että $\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k2^k+1} < \frac{1}{2}$ kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 2$. **(8 p.)**

1. Arvioidaan epäyhtälön vasenta puolta ylöspäin. Kun osoittaja kasvaa, murtolauseke kasvaa, Kun osoittaja pienenee, murtolauseke kasvaa: $\frac{k-1}{k \cdot 2^k + 1} < \frac{k}{k \cdot 2^k + 1} < \frac{k}{k \cdot 2^k} = \frac{1}{2^k}$

2. Edellisen kohdan tuloksen nojalla $\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k \cdot 2^k + 1} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n}$, mikä on geometrinen summa, jossa on n-1 termiä. $S_{n-1} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$.

6. Veteen putoava kivi 12 p.

Mallinnetaan veteen pudonneen kiven aiheuttamia aaltoja funktiolla $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, missä $f(x, y) = \dfrac{\sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\,\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, kun $(x, y) \neq (0, 0)$, ja $f(0, 0) = 1$.

1. Etsi kaksi muuta pistettä, joissa funktion arvo on sama kuin pisteessä $(3, 4)$. **(6 p.)**
2. Osoita, että jokaiselta xy-tason suoralta löytyy funktion nollakohta. **(6 p.)**

1. Riittää etsiä sellaiset pisteet, joille $x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Tämä on origokeskeinen ympyrä, jonka säde on 5. Esim. pisteet (0,5) ja (5,0) käyvät.

2. Funktio saa arvon 0, kun sen osoittaja saa arvon nolla. Koska osoittajassa on ainoastaan sinifunktio, niin sen nollakohdat saadaan, kun $\sqrt{x^2 + y^2} = n\pi,\ n > \mathbb{Z}_+$. Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, voidaan yhtälö korottaa puolittain toiseen potenssiin, jolloin saadaan $x^2 + y^2 = (n\pi)^2$. Tämä on origokeskeisen nπ-säteisen ympyrän yhtälö. Funktio saa siis arvon nolla jokaisella xy-tason ympyrällä, jonka säde on nπ. Jokainen xy-tason suora leikkaa varmasti tällaisen ympyräparven ympyrän kanssa, joten tämä leikkauspiste on funktion nollakohta.

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

7. Geometrinen juoksuharjoittelu 12 p.

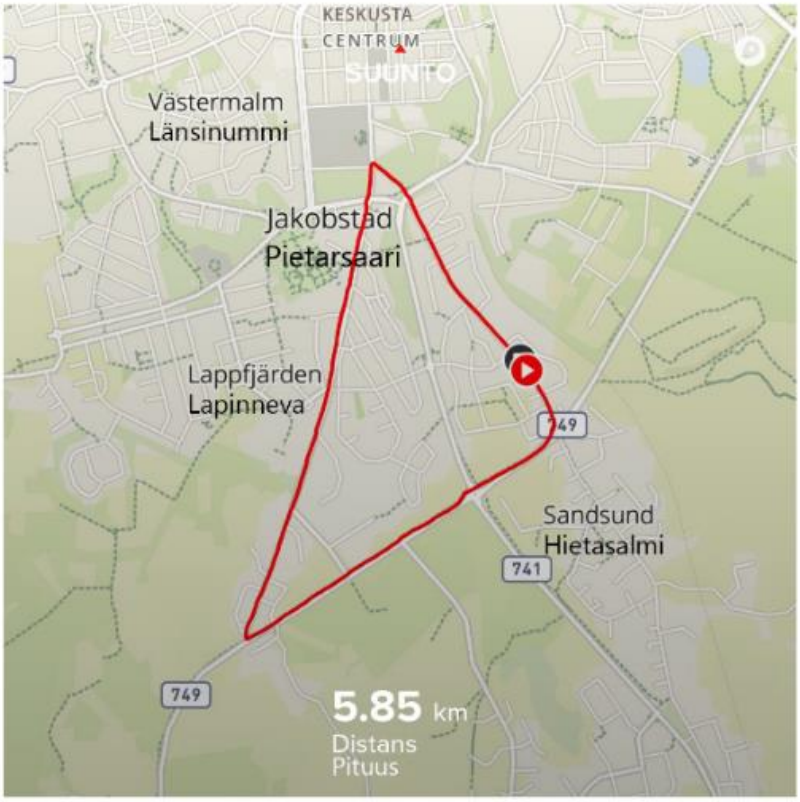
Aineisto

7.A Kuva: Juoksureitti

Matematiikan opettaja testasi älykelloaan juoksulenkillä. Tuloksena oli 5,85 kilometrin pituinen reitti, joka on esitetty kuvassa 7.A. Opettaja haluaa arvioida reitin sisälle jäävien kaupunginosien pinta-alaa. Hän mallintaa reittiä kolmiona, jonka sivujen pituuksien suhteet ovat 6 : 7 : 9 ja jonka piiri on 5,85 km.

1. Määritä mallikolmion suurin kulma asteina neljän merkitsevän numeron tarkkuudella. **(6 p.)**
2. Määritä mallikolmion pinta-ala hehtaareina. **(6 p.)**

7.A Kuva: Juoksureitti



Lähde: Suunto-sovellus. Viitattu: 31.12.2022.

1. Merkitään sivujen pituuksia 6a, 7a ja 9a. Suurin kulma on pisintä sivua vastapäätä, joten sen suuruus saadaan kosinilauseen avulla ja kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella esim. mallikolmiosta, jonka sivujen pituudet ovat (a=1) 6, 7 ja 9.

solve$(9^2=6^2+7^2-2*6*7*\cos(\alpha),\alpha)|\alpha>0$

$\{\alpha>0$ and $\alpha=360\cdot\text{constn}(1)-87.27059736, \alpha>0$ and $\alpha=360\cdot\text{constn}(2)+87.27059736\}$

Kulma on siis noin 87,27°.

2. Muodostetaan mittakaava kolmion piirin avulla. Mallikolmion, jonka sivujen pituudet ovat edellisen kohdan tapaan 6, 7 ja 9, piiri on 6+7+9=22km. Oikeassa kartassa piiri on 5,85km, joten mittakaava on 5,85:22. Mallikolmion pinta-ala on

$\frac{1}{2}*6*7*\sin(87.27)$

20.97616654

Pinta-alat suhtautuvat toisiinsa mittakaavan neliön mukaan, joten todellinen pinta-ala on

$20.97616654*\left(\frac{5.85}{22}\right)^2$

1.483175329

Pinta-ala on siis noin 1,48km^2.

8. Tikanheitto 12 p.

Aineisto

8.A Kuva: Tikkataulu

Ympyränmuotoisen tikkataulun keskellä on 10 pisteen arvoinen keskiympyrä, jonka säde on 2 cm. Sen ympärillä on 9 pisteen arvoinen rengas, jonka leveys on 2 cm. Tämän renkaan ympärillä on samanlevyinen 8 pisteen rengas, sen ympärillä samanlevyinen 7 pisteen rengas ja niin edelleen uloimpaan 1 pisteen renkaaseen saakka. Tikkataulussa on siis yhteensä 10 aluetta ja koko taulun säde on 20 cm, katso kuva 8.A.

1. Osoita laskemalla, että parillisten pistemäärien alueiden yhteenlaskettu pinta-ala on $180\pi\,\mathrm{cm}^2$. **(4 p.)**
2. Katri heittää tikkaa siten, että hän varmasti osuu tauluun, mutta voi osua mihin tahansa taulun kohtaan samalla todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä Katrin tulos on parillinen, kun hän heittää kolme tikkaa ja niiden pisteet lasketaan yhteen? **(8 p.)**

1. Lasketaan parillisten alueiden pinta-alat neliösenttimetreinä yhteen

$\pi((2^2)+(6^2-4^2)+(10^2-8^2)+(14^2-12^2)+(18^2-16^2))$

$$180\cdot\pi$$

Parillisten alueiden pinta-alojen summa on 180π cm^2.

2. Kolmen tikan tulos on parillinen, jos tikat osuvat kolmeen parilliseen osioon tai kahteen parittomaan ja yhteen parilliseen osioon. Koska parillisten alueiden yhteenlaskettu pinta-ala on 180π, niin parittomien osien yhteenlaskettu pinta-ala on

$\pi*20^2-180\pi$

$$220\cdot\pi$$

Koska tikat osuvat toisistaan riippumatta mihin tahansa taulun kohtaan, on kysytty todennäköisyys binomitodennäköisyyden avulla

$\left(\frac{180\pi}{\pi*20^2}\right)^3+\mathrm{nCr}(3,1)*\left(\frac{180\pi}{\pi*20^2}\right)*\left(\frac{220\pi}{\pi*20^2}\right)^2$

$$\frac{999}{2000}$$

Todennäköisyys saada kolmen heiton summaksi parillinen luku on $\frac{999}{2000}$.

9. Jaksollisuus 12 p.

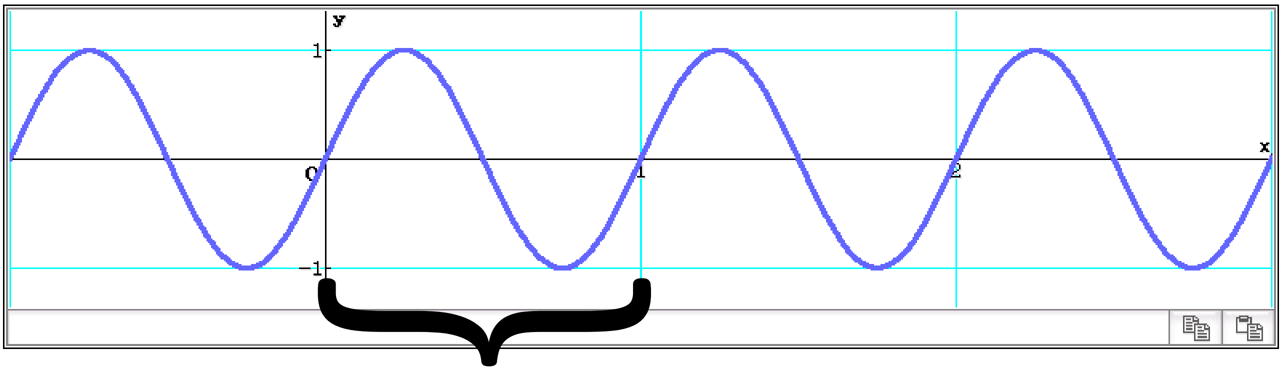
Funktio $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on *jaksollinen*, jos on olemassa sellainen $L > 0$, että sen kuvaaja pysyy samana, kun sitä siirretään L yksikköä vaakasuorassa suunnassa. Tämä ominaisuus voidaan esittää myös ehdolla $f(x+L) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Pienin tällainen luku L on funktion *perusjakso*.

Piirrä jokaisessa osatehtävässä funktion kuvaaja omaan koordinaatistoonsa. Anna vastauksena funktion perusjakso sekä kuvaaja, johon on merkitty perusjakson mittainen osa x-akselia.

1. $f(x) = \sin(2\pi x)$ **(4 p.)**
2. $g(x) = |\sin(\pi x) + \sin(2\pi x)|$ **(4 p.)**
3. Anna esimerkki jaksollisesta funktiosta $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, jonka perusjakso on 4. **(4 p.)**

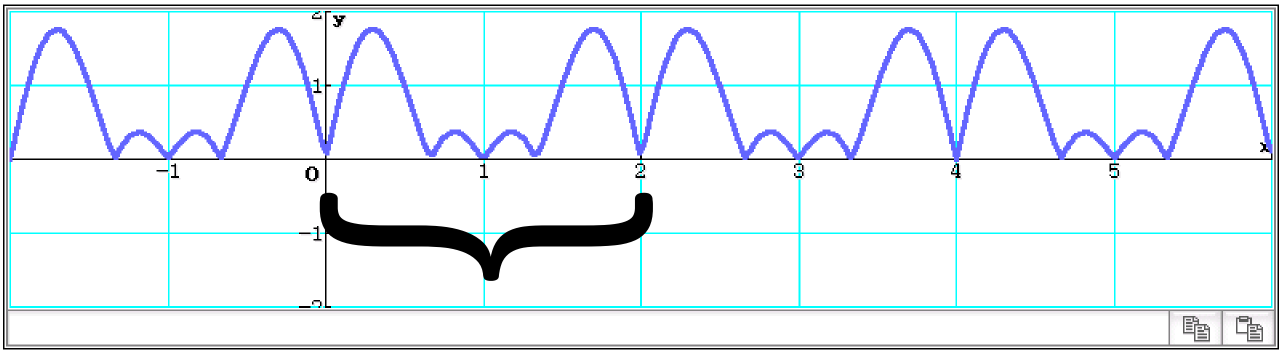
1. Koska sinifunktion jakso on 2π ja muuttujan kertominen sinifunktion sisällä pienentää jaksoa, on esimerkkifunktion jakson pituus $\frac{2\pi}{2\pi}=1$.

Kuvaaja $y=\sin(2\pi*x)$



2. Sinifunktion jakso on 2π, joten funktion $\sin(\pi x)$ jakso on $\frac{2\pi}{\pi}=2$. Kun tähän lisätään funktio $\sin(2\pi x)$, jonka jakso on 1, saadaan jaksoltaan 2 oleva funktio. Itseisarvot eivät vaikuta funktion jakson pituuteen tässä tapauksessa.

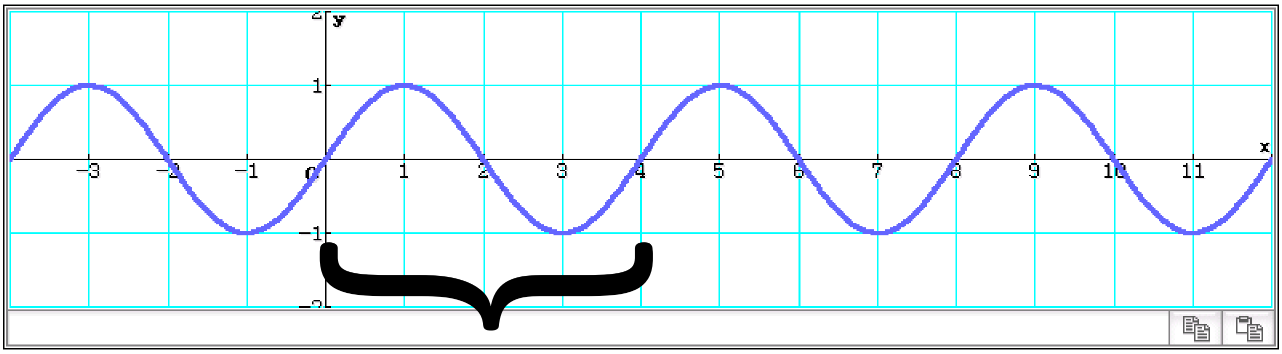
Kuvaaja $y=\text{abs}(\sin(\pi\cdot x)+\sin(2\cdot\pi\cdot x))$



3. Otetaan yksinkertainen funktio $f(x)=\sin(x)$, jonka jakso on 2π. Kerrotaan muuttuja luvulla $\frac{\pi}{2}$, jolloin jaksoksi saadaan $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$. Kysytty funktio on siis esim.

$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}*x)$.

Kuvaaja $y=\sin(\pi/2*x)$



10. Ohjelmakoodi ja tekijät 12 p.

Aineisto

10.A Teksti: Papun koodi

Papu yritti selvittää positiivisen kokonaisluvun alkutekijät. Tähän tarkoitukseen hän kirjoitti Python-koodin, joka on esitetty tekstissä 10.A. Koodissa #-merkkiä seuraava teksti on kommentti, joka ei vaikuta ohjelman toimintaan. Papu ajoi ohjelman muuttujan n eri alkuarvoilla. Hän huomasi, että toisinaan ohjelma toimi virheettömästi ja tulosti luvun n alkutekijät, toisinaan se tulosti muitakin lukuja.

Osatehtävissä 10.1 ja 10.2 vastauksesta täytyy ilmetä käytetty alkuarvo ja ohjelman tuloste.

1. Anna esimerkki luvun n alkuarvosta, jolle ohjelma tulostaa listan, joka sisältää vain luvun n alkutekijöitä. **(3 p.)**
2. Anna esimerkki luvun n alkuarvosta, jolle ohjelma tulostaa muitakin kuin luvun n alkutekijöitä. **(3 p.)**
3. Selitä, miksi ohjelma ei aina toimi niin kuin Papu oli tarkoittanut. **(6 p.)**

Huomaa, että tehtävässä annettua ohjelmakoodia voi ajaa koeympäristön ohjeiden Ohjelmointi-välilehdellä. Siellä on myös Python-kielen käskyjen selityksiä.

10.A Teksti: Papun koodi

Koodi kuvana

```
n=x                           # korvaa x tutkittavalla luvulla
m=n
while n>1:                    # toista niin kauan, kun n>1
   for a in range(2,m+1):     # a käy läpi arvot 2, 3,..., m
      if n%a==0:              # jos n modulo a on nolla
         print(a)             # tulosta luvun a arvo
         n=n/a
```

Koodi tekstinä

```
n=x                                     # korvaa x tutkittavalla luvulla
m=n
while n>1:                              # toista niin kauan kuin n>1
        for a in range(2,m+1):          # a käy läpi arvot 2, 3,..., m
                if n%a==0:              # jos n modulo a on nolla
                        print(a)        # tulosta luvun a arvo
                        n=n/a
```

Lähde: YTL.

1. Esim. luku x=15 tulostaa 3 ja 5, jotka ovat luvun 15 alkutekijät.
2. Esim. luku x=8 tulostaa 2 ja 4, mutta 4 ei ole alkuluku.
3. Ohjelma ei testaa, onko saatu luku alkuluku. Ohjelma tutkii vain, onko ensimmäisellä jakajalla saatu luku jaollinen jollain luvulla ja jos on, tulostaa sen.

B2-osa

Vastaa kahteen tehtävään.

11. Paraabelialueita 12 p.

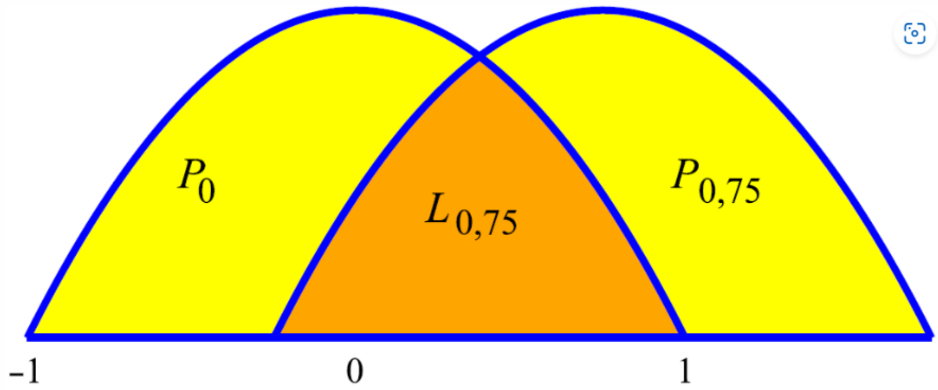
Aineisto

11.A Kuva: Alueiden leikkaus

Tarkastellaan tasojoukkoa P_0, jonka alareuna on x-akselin jana $[-1, 1]$ ja yläreuna paraabelin kaari $y = 1 - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$. Arvoilla $a > 0$ määritellään uusi joukko P_a siirtämällä joukkoa P_0 vaakasuorassa suunnassa oikealle etäisyyden a verran. Olkoon $L_a = P_0 \cap P_a$ joukkojen P_0 ja P_a leikkaus eli yhteinen osa. Kuvassa 11.A on esimerkkinä tapaus $a = 0{,}75$.

1. Määritä joukon $L_{0,75}$ pinta-ala. **(4 p.)**
2. Olkoon a sellainen parametrin arvo, että joukon L_a pinta-ala on puolet joukon P_0 pinta-alasta. Tämä arvo a on erään kolmannen asteen yhtälön ratkaisu. Määritä tämä yhtälö ja ratkaise siitä parametrin a likiarvo kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. **(8 p.)**

11.A Kuva: Alueiden leikkaus



Lähde: YTL.

1\. Paraabelin yhtälö on muotoa $y=1-(x-a)^2$, missä a on siirtymä oikealle. Joukon pinta-ala on kahden käyrän ja x-akselin rajoittama alue, jonka arvo saadaan määrätyn integraalin avulla arvolla a=0.75.

$$\int_{-0.25}^{-0.25+\frac{1-(-0.25)}{2}} 1-(x-0.75)^2dx+\int_{-0.25+\frac{1-(-0.25)}{2}}^{1} 1-x^2dx$$

$$\frac{475}{768}$$

Pinta-ala on siis $\frac{475}{768}\approx 0{,}62$pay.

2. Lasketaan ensin joukon P_0 pinta-ala.

$$\int_{-1}^{1} 1-x^2 dx$$

$$\frac{4}{3}$$

Käyrien suuruusjärjestys ja samalla integroinnin raja muuttuu niiden leikkauspisteessä, joten ratkaistaan sen x-koordinaatti.

solve$(1-x^2=1-(x-a)^2, x)$

$$\left\{x=\frac{a}{2}\right\}$$

Ratkaistaan yhtälö, josta saadaan a.

$$\int_{-1+a}^{\frac{a}{2}} 1-(x-a)^2 dx+\int_{\frac{a}{2}}^{1} 1-x^2 dx$$

$$\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{a^3}{4}-a\cdot(a-1)^2+a^2\cdot(a-1)-a+\frac{5}{3}$$

simplify(ans)

$$\frac{a^3-12\cdot a+16}{12}$$

Ratkaistaan yhtälö, jossa tämä pinta-ala on puolet joukon P_0 pinta-alasta.

solve$\left(\frac{a^3-12\cdot a+16}{12}=\frac{1}{2}*\frac{4}{3}, a\right)$

{a=−3.758770483, a=0.6945927107, a=3.064177772}

Luvun a on kuuluttava välille]0, 2[, jotta leikkausjoukolle saadaan pinta-ala. Vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella on a≈0,695.

12. Bézier-käyriä (12 p.)

Aineisto

12.A Teksti ja animaatio: Bézier-käyrän määritelmä

Bézier-käyriä käytetään tietokoneavusteisessa suunnittelussa (CAD), joka on vektorigrafiikan tärkeä sovelluskohde. Bézier-käyrä määritetään niin sanottujen ohjauspisteiden avulla, kuten tekstissä 12.A on kuvattu.

1. Eräs lineaarinen Bézier-käyrä koostuu pisteistä $B(t) = (4t, t+2), 0 \leq t \leq 1$. Määritä tämän käyrän ohjauspisteet. **(4 p.)**
2. Erään toisen asteen Bézier-käyrän ohjauspisteet ovat $P_0 = (-2, 0)$, $P_1 = (0, 8)$ ja $P_2 = (2, 0)$. Määritä käyrän yhtälö muodossa $y = f(x)$. **(8 p.)**

12.A Teksti ja animaatio: Bézier-käyrän määritelmä

Bézier-käyrä määritellään ohjauspisteillä P_0, ..., P_n, jossa n on käyrän aste ($n = 1$ lineaariselle käyrälle, $n = 2$ toisen asteen käyrälle jne.). Ensimmäinen ja viimeinen ohjauspiste ovat aina käyrän päätepisteitä.

Ohjauspisteet P_0 ja P_1 määrittävät lineaarisen Bézier-käyrän, joka on parametrisoitu käyrä

$$B(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad 0 \le t \le 1.$$

Tämä käyrä on ohjauspisteet yhdistävä jana. Tässä lausekkeessa pisteitä käsitellään kuten paikkavektoreita. Esimerkiksi

$$\frac{1}{4}(2,1) + \frac{3}{4}(3,5) = \left(\frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{3}{4}\cdot 3,\ \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 5\right) = \left(\frac{11}{4}, 4\right).$$

Toisen asteen Bézier-käyrä ohjauspisteillä P_0, P_1 ja P_2 on parametrisoitu käyrä

$$B(t) = (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2], \quad 0 \le t \le 1.$$

Huomaa, että hakasulkeissa on pisteitä P_0 ja P_1 ja pisteitä P_1 ja P_2 vastaavat lineaariset Bézier-käyrän pisteet. Alla olevassa animaatiossa toisen asteen Bézier-käyrän muodostaminen on esitetty visuaalisesti.

1. Kun t=0, saadaan ohjauspisteeksi B(0)=(4*0, 0+2)=(0, 2). Kun t=1, saadaan ohjauspisteeksi B(1)=(4*1, 1+2)=(4, 3).

2. Liitteen nojalla, Bezier-käyrä saadaan sijoittamalla ohjauspisteet parametrimuotoon

$$(1-t)*((1-t)*\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}+t*\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix})+t*((1-t)*\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}+t*\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix}-2\cdot(t-1)^2+2\cdot t^2\\-16\cdot t\cdot(t-1)\end{bmatrix}$$

simplify(ans)

$$\begin{bmatrix}4\cdot t-2\\-16\cdot t\cdot(t-1)\end{bmatrix}$$

Koska $-16\cdot t\cdot(t-1)=-16t^2+16t=-(4t-2)^2+4$, niin sijoittamalla $x=4t-2$, saadaan parametrimuodosta funktio $f(x)=-x^2+4$. Funktio on määritelty välillä

$$0\le t\le 1 \;\Leftrightarrow\; 0\le\frac{x+2}{4}\le 1 \;\Leftrightarrow\; 0\le x+2\le 4 \;\Leftrightarrow\; -2\le x\le 2$$

13. Epäjatkuva funktio 12 p.

Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x-5, & \text{kun } x \le 1, \\ x^2+x-2, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Jalmari on osoittanut seuraavalla tavalla, että $f'(1) = 3$.

> Lasketaan funktion f erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = 1$. Tällöin
>
> $$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{3x-5-(3\cdot 1-5)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{3x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$$
>
> ja
>
> $$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{x^2+x-2-(1^2+1-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$
> $$= \lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} (x+2) = 3.$$
>
> Koska erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret ja niiden yhteinen arvo on 3, niin funktio f on derivoituva kohdassa $x = 1$ ja $f'(1) = 3$.

1. Osoita, että f ei ole jatkuva kohdassa $x = 1$. Miksi tämä on ristiriidassa Jalmarin tuloksen kanssa? Minkä virheen Jalmari tekee todistuksessaan? **(6 p.)**
2. Osoita, että f on monotoninen joukossa $\mathbf{R}$. **(6 p.)**

1. Jatkuvuus on ehto derivoituvuudelle. Jalmari olettaa funktion olevan jatkuva pisteessä x=1, mutta se ei ole, sillä sen toisepuoleiset raja-arvot ovat erisuuret:

$$\lim_{x\to 1-} (3x-5)$$

−2

$$\lim_{x\to 1+} (x^2+x-2)$$

0

Funktion arvo kohdassa x=1 pitää laskea funktion määrittelyn perusteella lausekkeesta 3x−5, mutta Jalmari on laskenut f(1) lausekkeesta x^2+x-2.

2. Kaikille x<1 funktio on nouseva suora y=3x−5, joten funktio on kasvava välillä]−∞,1[. Kaikille x>1 funktio on paraabelin $y=x^2+x-2$ osa. Koska y'=2x+1 ja 2x+1=0, kun $x=-\frac{1}{2}$, on ylöspäin avautuvan paraabelin huipun x-koordinaatti $-\frac{1}{2}$. Paraabeli on kasvava kaikille $x>-\frac{1}{2}$, erityisesti kun x>1. Tutkittavaksi jää vielä kohta x=1. Koska f(1)=3*1−5=−2 ja $\lim_{x\to 1+} (f(x))=1^2+1-2=0$, niin myös kohdassa x=1 funktio on kasvava. Niinpä f on monotoninen kaikkialla joukossa **R**.

Muistiinpanoja ja huomioita:

Muistiinpanoja ja huomioita:

Katso aiempien yo-kokeiden ratkaisut