Laske Laudatur Casion avulla

Lyhyt matematiikka,
syksy 2024

Sisältö

Syksyn 2024 matematiikan yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavan ja Abitista löytyvän ClassPad Managerin avulla laskettuina.

Pepe Palovaara

Fintegrity

CASIO®

FI – Matematiikka, lyhyt oppimäärä

26.9.2024

Koe koostuu 11 tehtävästä, joista vastataan yhdeksään. Tehtävät on jaettu kahteen osaan. A-osassa on kuusi tehtävää, joista vastataan viiteen. B-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan neljään. Tehtävät 1–9 arvostellaan pistein 0–12, ja tehtävät 10 ja 11 pistein 0–18. Kokeen maksimipistemäärä on 120 ja sen voi saavuttaa vain, jos vastaa tehtäviin 10 ja 11.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 6 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osan tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Useimmissa tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

A-osa

Vastaa viiteen tehtävään.

1. Arjen matematiikkaa 12 p.

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen osatehtävän vastaus on kokonaisluku.

1.1 Laske. 2 p.

Suklaapatukat maksavat yksittäin 2 euroa, mutta kolmen patukan pakkauksen saa 4 eurolla. Kymmenen suklaapatukkaa maksaa halvimmillaan [14] euroa.

1.2 Laske. 2 p.

Juna lähtee Oulusta kello 9.48 ja on perillä Helsingissä kello 15.25. Junamatkan kesto on [5] 1 p. tuntia ja [37] 1 p. minuuttia.

1.3 Laske. 2 p.

Reseptin mukaan kuuteen annokseen pannacottaa tarvitaan $1\frac{1}{2}$ desilitraa maitoa. Yhdestä litrasta maitoa saa [40] annosta.

1.4 Laske. 3 p.

Harrin palkka on $4\,200$ euroa kuukaudessa. Hänen palkastaan vähennetään 24 % ennakonpidätystä ja 9 % pakollisia eläke- ja työttömyysvakuutusmaksuja. Harrin nettopalkka euron tarkkuudella on [2814] euroa.

1.5 Laske. 3 p.

Alma maksaa kuukaudessa 12 euron ennakkomaksun vedenkäytöstään. Kuuden kuukauden välein isännöitsijä lähettää todelliseen kulutukseen perustuvan tasauslaskun, jossa on huomioitu jo maksetut ennakkomaksut. Tammi–kesäkuussa Alman veden kulutus oli $17{,}012\ \mathrm{m}^3$, ja veden hinta on $4{,}63$ euroa/m^3. Alman tammi–kesäkuun tasauslaskun loppusumma kokonaisiksi euroiksi pyöristettynä on $\boxed{7}$ euroa.

2. Yhtälö ja kolmio 12 p.

1. Ratkaise yhtälö $x^2 + 14 = 9x$. **(4 p.)**
2. Suora $y = -2x + 6$ rajaa positiivisten x- ja y-akseleiden kanssa suorakulmaisen kolmion. Määritä tämän kolmion pinta-ala ja hypotenuusan pituus. **(8 p.)**

1. $x^2 + 14 = 9x \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = \dfrac{9 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 7$

2. Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0,6) ja x-akselin kohdassa $0 = -2x + 6 \Leftrightarrow x = 3$. Yksi kulma on origossa. Kolmio on suorakulmainen, joten sen pinta-ala on $A = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ pay. Hypotenuusan päätypisteet ovat (0,6) ja (3,0) ja sen pituus on $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$

3. Juomalaseja mainoksessa 12 p.

Aineisto

3.A Kuva: Esimerkkimuodostelma

Mainostoimisto suunnittelee astianpesuaineen mainosvideon. Tuottajan ajatuksena on asettaa suuri määrä juomalaseja kolmion muotoiseen kuvioon kuvan 3.A mukaisesti. Ensimmäisellä rivillä on yksi lasi, toisella rivillä kaksi, kolmannella rivillä kolme ja niin edelleen siten, että seuraavalla rivillä on aina yksi lasi enemmän kuin edellisellä rivillä.

1. Kuinka monta juomalasia on kymmenellä ensimmäisellä lasirivillä yhteensä? **(3 p.)**
2. Määritä lauseke juomalasien kokonaismäärälle, kun lasirivejä on n kappaletta. **(4 p.)**
3. Kuinka monta lasiriviä on $3\,916$ juomalasin muodostelmassa? **(5 p.)**

3.A Kuva: Esimerkkimuodostelma

Lähde: YTL.

1. Laseja on 1+2+ ... +10 = 55kpl.
2. Koska uuteen riviin tulee aina yksi lasi lisää, muodostaa lasien määrä aritmeettisen lukujonon, jossa ensimmäinen jäsen on 1 ja lisäys d=1. Aritmeettisen summan kaavalla lasien määräksi saadaan $\frac{n(n+1)}{2}$.
3. Ratkaistaan yhtälö

$$\frac{n(n+1)}{2} = 3916 \Leftrightarrow n^2 + n - 7832 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7832)}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 177}{2}$$

$\Leftrightarrow n = -89 \vee n = 88$. Lasirivien lukumäärä on positiivinen kokonaisluku, joten vastaus on 88.

4. Kuulantyöntö 12 p.

Ryan Crouserin 18.2.2023 työntämän huipputuloksen perusteella on mallinnettu kuulantyönnön tulosta metreinä polynomifunktiolla

$$f(x) = -0{,}0126x^2 + 1{,}07x + 0{,}630,$$

kun muuttuja $0 \leq x \leq 60$ on työnnön suuntakulma asteina (vaakatasosta mitattuna). Määritä derivaattaa käyttämällä suurimpaan työntötulokseen johtava työntökulma asteen sadasosan tarkkuudella ja sitä vastaava työntötulos yhden senttimetrin tarkkuudella.

Kuulantyönnön tulosta kuvaavan funktion kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli, joten pisin työntö saadaan funktion maksimikohdassa. Derivoidaan funktio ja lasketaan sen derivaattafunktion nollakohta, jonka on siis oltava maksimikohta.

$$f'(x) = -0{,}0252x + 1{,}07 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1{,}07}{0{,}0252} = 42{,}4603 \approx 42{,}46°$$

Tätä kulmaa vastaava työntötulos on

$$f(42{,}4603) - 0{,}0126 \cdot 42{,}4603^2 + 1{,}07 \cdot 42{,}4603 + 0{,}630 \approx 23{,}35 \quad \text{metriä.}$$

5. Lainojen vertailu 12 p.

Naava ja Silmu ottavat kumpikin 9 000 euron lainan. Naavan laina on tasalyhennyslaina ja Silmun laina on annuiteettilaina. Kummankin lainan vuotuinen korkokanta on 5 % ja laina-aika 3 vuotta. He lyhentävät lainojaan kerran vuodessa. Kumman viimeinen maksuerä on suurempi?

Vuotuinen annuiteetti on $9000 \cdot 1{,}05^3 \cdot \dfrac{1-1{,}05}{1-1{,}05^3} \approx 3304{,}88$ euroa ja vuotuinen tasalyhennys korkoineen on

$1{,}05 \cdot 3000 = 3150$ euroa. Viimeinen maksuerä on suurempi annuiteettilainassa.

6. Jakaumia, kuvaajia ja todennäköisyyksiä 12 p.

Aineisto

6.A Kuva: Onnistumistodennäköisyyksiä prosentteina

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2–3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

6.1 Yhdistä seuraaviin väitteisiin sopiva onnistumistodennäköisyyden jakauma kuvasta 6.A. Heitetään kerran kahta noppaa ja tavoitteena on saada 6 p.

kummankin nopan silmäluvuksi parillinen. Jakauma 1 2p.

silmälukujen tuloksi parillinen luku. Jakauma 3 2p.

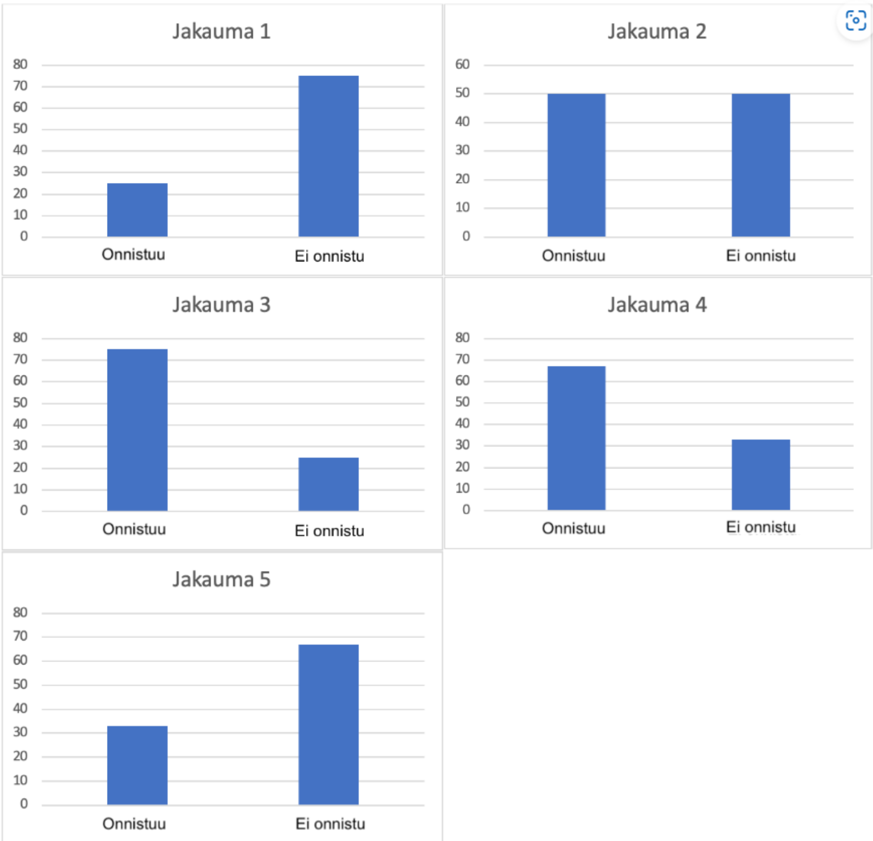
silmälukujen summa, joka ei ole kolmella jaollinen. Jakauma 4 2p.

6.2 Korttipakassa on neljä maata, joista kussakin kortit numeroilla 2–10. Pakasta nostetaan kaksi korttia ilman takaisinpanoa. 6 p.

Mikä on todennäköisyys sille, että kummankin kortin numero on parillinen?
ei mikään ylläolevista 3p.

Mikä on todennäköisyys sille, että korttien numeroiden tulo on parillinen? $\frac{17}{21}$ 3p.

6.A Kuva: Onnistumistodennäköisyyksiä prosentteina



Lähde: YTL.

B-osa

Vastaa neljään tehtävään.

7. Piparkakkurasiat 12 p.

Aineisto

7.A Kuva: Rasiat eri kuvakulmista

Joulun piparkakut pakataan kolmeen erikokoiseen ympyräpohjaiseen peltirasiaan, jotka näkyvät kuvassa 7.A.

- Suurimman rasian ympärysmitta on 78,5 cm ja korkeus on 10,0 cm.
- Keskimmäisen rasian säde on 1,5 cm pienempi ja korkeus 1,0 cm pienempi kuin suurimman rasian.
- Pienimmän rasian säde on 2,5 cm pienempi ja korkeus 1,0 cm pienempi kuin keskimmäisen rasian.

Laske rasioiden yhteistilavuus desilitran tarkkuudella.

7.A Kuva: Rasiat eri kuvakulmista

Lähde: YTL.

Rasioiden korkeudet suurimmasta pieninpään ovat 10cm, 9cm ja 8cm. Niiden säteet samassa järjestyksessä ovat $\frac{78,5}{2\pi}$cm, $\frac{78,5}{2\pi}-1,5$cm ja $\frac{78,5}{2\pi}-1,5-2,5$cm. Lasketaan kappaleiden tilavuuksien summa (cm^3):

$$10\pi*\left(\frac{78.5}{2\pi}\right)^2+9\pi*\left(\frac{78.5}{2\pi}-1.5\right)^2+8\pi*\left(\frac{78.5}{2\pi}-4\right)^2$$

10134.15051

$1\text{dl}=0,1\text{dm}^3=100\text{cm}^3$, joten rasioiden tilavuus on n. 101dl.

CASIO

8. Moottoritien kustannukset 12 p.

Helsingin Sanomat kirjoitti 20.6.1972:

> Suomen suurin tietyö jyrää maiseman halki Helsingistä Lahteen. Leveimmillään kuusikaistainen Lahden moottoritie maksaa noin 320 miljoonaa markkaa, yli 3 markkaa millimetri.

Vuonna 2018 valmistuneessa tiehankkeessa Haminasta Vaalimaalle kulkevan 32 kilometrin pituisen moottoritieosuuden hinta oli 550 miljoonaa euroa. Tässä tehtävässä eri vuosien kustannuksia verrataan käyttämällä "Aku Ankka -indeksiä", joka perustuu seuraavaan tietoon: Aku Ankka -lehden irtonumero maksoi 0,80 markkaa vuonna 1972 ja 3,50 euroa vuonna 2018.

Mitkä olivat Helsinki–Lahti-moottoritien kustannukset vuoden 2018 rahassa?

Kuinka monta prosenttia kalliimpi Hamina–Vaalimaa-moottoritie oli kilometriä kohti kuin Helsinki–Lahti-moottoritie rahan arvon muutos huomioiden?

Hinnan muutos euroihin saadaan kertoimella

$$\frac{3.50}{0.8}$$

$$\frac{35}{8}$$

Kustannukset euroissa Helsinki–Lahti –tielle olivat

$$320000000*\frac{35}{8}$$

$$1400000000$$

Hinta kilometriä kohden Hamina–Vaalimaa –tiellä oli

$$\frac{550000000}{32}$$

$$17187500$$

ja Helsinki–Lahti –tiellä (3 mk/mm tiedolla muunnos x €/km)

$$3*1000000*\frac{35}{8}$$

$$13125000$$

Prosentteina ilmoitettuna Hamina–Vaalimaa –tie oli kalliimpi

$$100*\frac{17187500-13125000}{13125000}$$

$$30.95238095$$

eli noin 31%.

9. Perusteltu binomijakauma 12 p.

Noppaa heitetään kuusi kertaa. Todennäköisyys saada silmäluku 6 täsmälleen neljä kertaa on binomitodennäköisyyden kaavan mukaan

$$\binom{6}{4}\left(\tfrac{1}{6}\right)^4\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{15552} \approx 0{,}00804.$$

Selitä käytetty kaava ja kaikki siinä esiintyvät osat, eli perustele binomitodennäköisyyden kaava tässä tilanteessa.

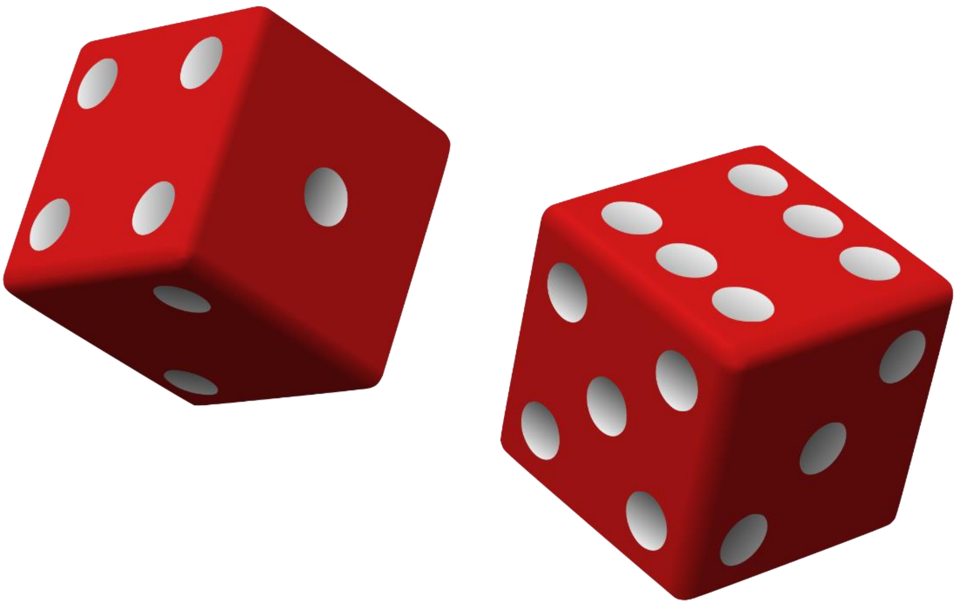
Todennäköisyys saada kuutonen yhdellä heitolla on $\frac{1}{6}$ ja todennäköisyys saada joku muu kuin kuutonen on sen vastatapahtumana $\frac{5}{6}$.

$\left(\frac{1}{6}\right)^4$ tarkoittaa kuutosen saamisen todennäköisyyttä neljästi ja $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ muun kuin kuutosen saamista kahdesti.

Binomikerroin $\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$ antaa kaikkien eri järjestysten lukumäärän, johon neljä kuutosta voidaan kuuden heiton sarjassa asettaa.

Todennäköisyydet kerrotaan keskenään, jotta saadaan tapahtuman "tasan neljä kuutosta ja kaksi jotain muuta" todennäköisyys.

$\frac{125}{15552}$ on todennäköisyyden tarkka arvo ja $0,00804$ sen viisidesimaalinen likiarvo.



10. Terminen talvi 18 p.

Aineisto

10.A Teksti: Termisen talven määritelmä ja esimerkki

10.B Taulukko: Keskilämpötilat Enontekiön Kilpisjärven Saanan havaintoasemalta aikaväliltä 1.9.2021–30.11.2021

Valitse osatehtävissä 10.1–10.2 oikea vaihtoehto. Näitä vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1–2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

Tarkastellaan Saanan havaintoaseman lämpötiloja taulukosta 10.B käyttäen tekstin 10.A käsitteitä. Teksti on Ilmatieteen laitoksen termisiä vuodenaikoja koskeva esitys kokonaisuudessaan. Tehtävän ratkaisua varten täytyy tekstistä hakea itse tarvittavat tiedot.

10.1 Valitse oikea vaihtoehto. 2 p.

Syyskuun korkein päivän keskilämpötila asteen tarkkuudella oli [7] 1 p. celsiusastetta, ja se saavutettiin [27.9.] 1 p.

10.2 Valitse oikea vaihtoehto. 2 p.

Syyskuun keskilämpötila asteen tarkkuudella oli [1] celsiusastetta.

10.A Teksti: Termisen talven määritelmä ja esimerkki

Termiset vuodenajat määritellään vuorokauden keskilämpötilojen perusteella. Suomessa termisistä vuodenajoista pisin on talvi ja lyhyin kevät.

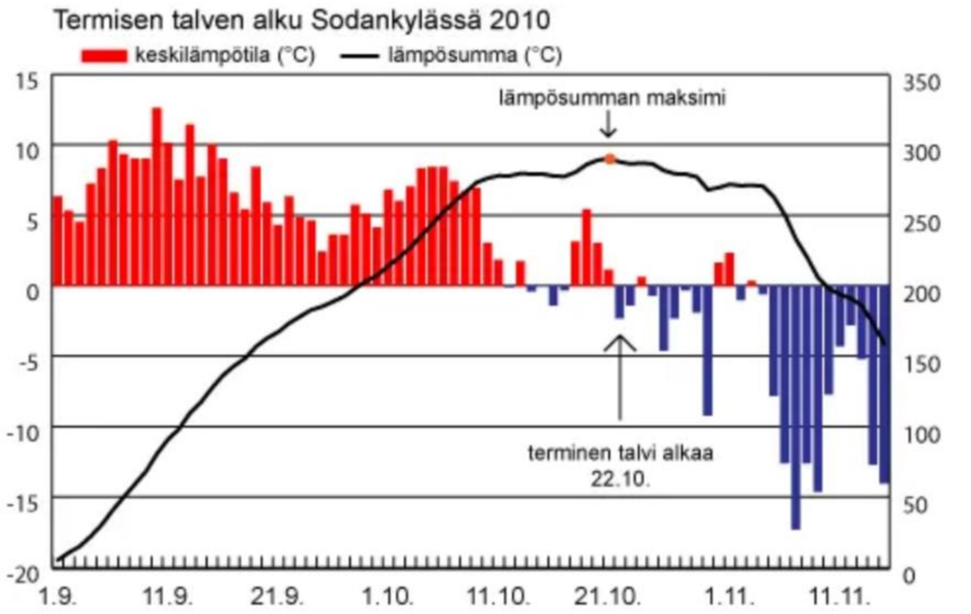
Suomessa termisten vuodenaikojen vaihtuminen määritellään perinteisesti seuraavasti:

- kevät alkaa, kun vuorokauden keskilämpötila nousee pysyvämmin 0 asteen yläpuolelle
- kesä alkaa, kun vuorokauden keskilämpötila nousee pysyvämmin +10 asteen yläpuolelle
- syksy alkaa, kun vuorokauden keskilämpötila laskee pysyvämmin +10 asteen alapuolelle
- talvi alkaa, kun vuorokauden keskilämpötila laskee pysyvämmin 0 asteen alapuolelle.

Suomessa vuodenajan vaihtuessa keskilämpötila voi vaihdella raja-arvojen molemmin puolin pitkäänkin, eikä vuodenajan vaihtumisen ajankohta ole suinkaan aina yksiselitteinen.

Nykyään termisten vuodenaikojen vaihtuminen perustuu edellisten viikkojen/kuukausien aikana laskettuun lämpösummaan. Esimerkiksi talvi alkaa seuraavasta päivästä, kun syyskuun alusta laskettujen vuorokauden keskilämpötilojen summa on saavuttanut suurimman arvonsa. Tällöin lämpötilan voidaan katsoa olevan pysyvämmin nollan alapuolella, vaikka yksittäisinä vuorokausina nolla astetta saatettaisiin ylittääkin.

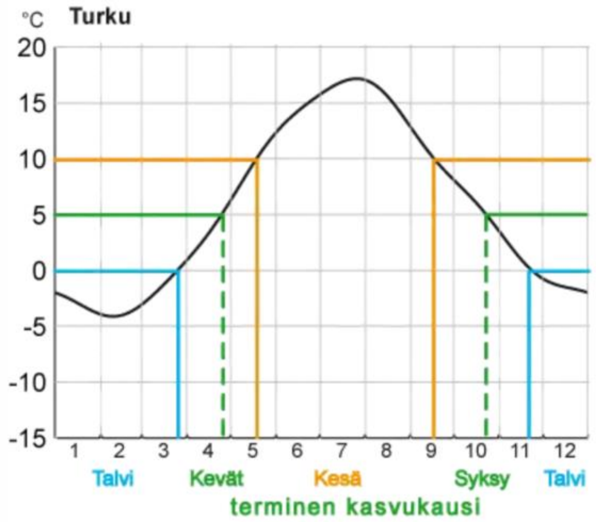
Termisten vuodenaikojen vaihtumisesta viestitään jatkossa vain kerran, kun koko maan päivämäärät voidaan varmuudella todeta. Tällöin Ilmasto-sivuilla olevat kartat päivitetään. Kuukausittain tapahtuvaa seurantaa ei enää tuoteta.

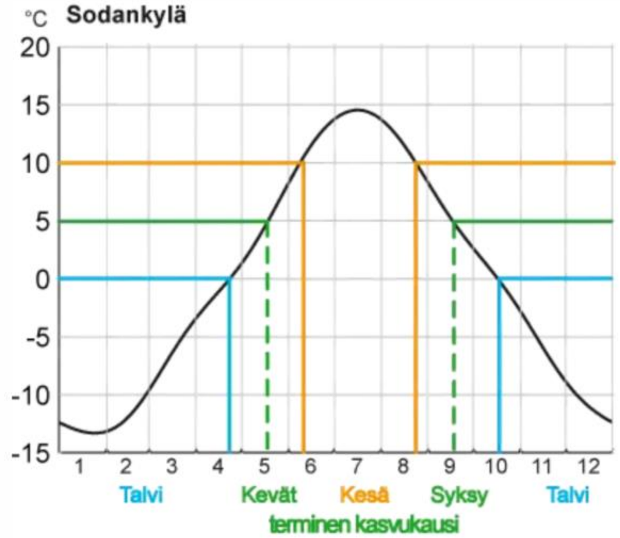


Termisen talven alkamisen ajankohdan määrittäminen lämpösummalla.

Termisten vuodenaikojen alkamisajankohdat poikkeavat Etelä- ja Pohjois-Suomessa melkoisesti toisistaan.

Esimerkiksi Sodankylässä kevät ja kesä saapuvat noin kuukautta myöhemmin ja vastaavasti syksy ja talvi tulevat noin kuukautta aikaisemmin kuin Turussa.



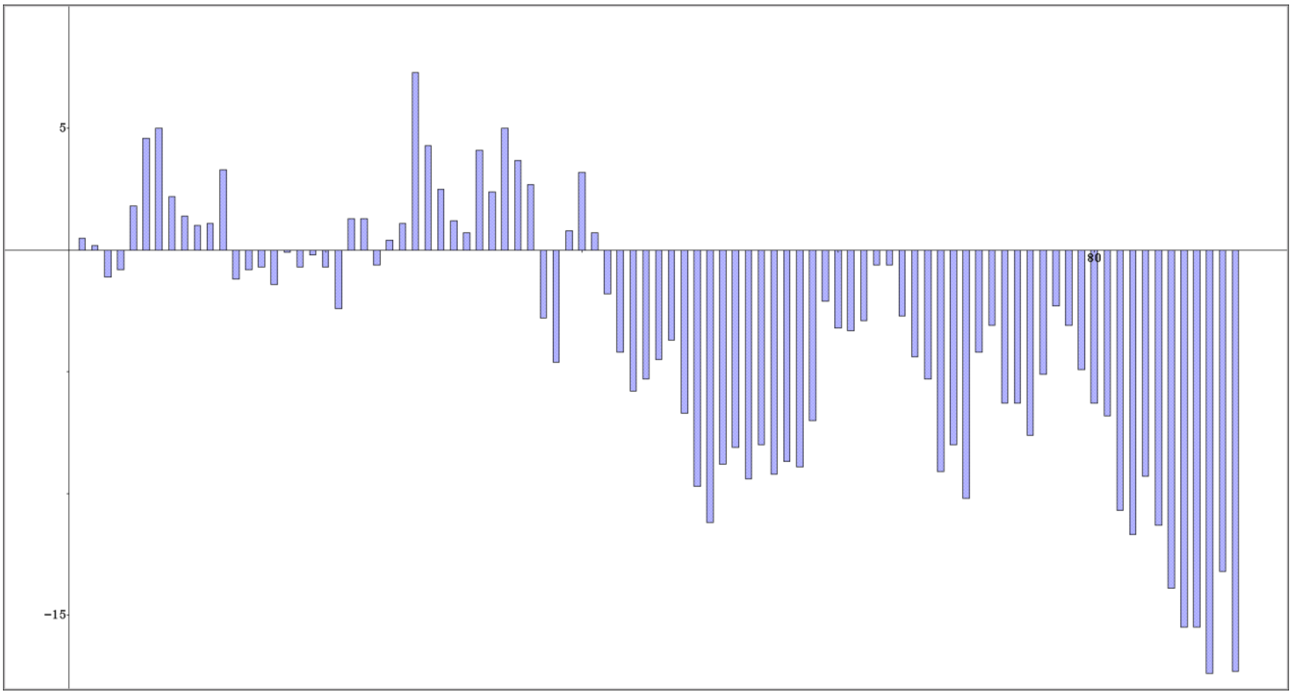


Termisten vuodenaikojen ajankohdat Turussa ja Sodankylässä vertailukaudella 1981–2010.

Lähde: Ilmatieteen laitos. *https://www.ilmatieteenlaitos.fi/termiset-vuodenajat*. Viitattu: 11.3.2023.

10.3 Kirjoita osatehtävien 10.3.1 ja 10.3.2 vastaukset vastauskenttään. 14 p.

10.3.1 Piirrä pylväsdiagrammi päivittäisistä keskilämpötiloista. 4 p.



Jokainen pylväs kuvaa yhden päivän keskilämpötilaa Saanalla syyskuun 1. päivästä marraskuun 30. päivään vuonna 2021.

10.3.2 Määritä lämpösumman avulla, milloin terminen talvi alkoi Saanalla vuonna 2021. 10 p.

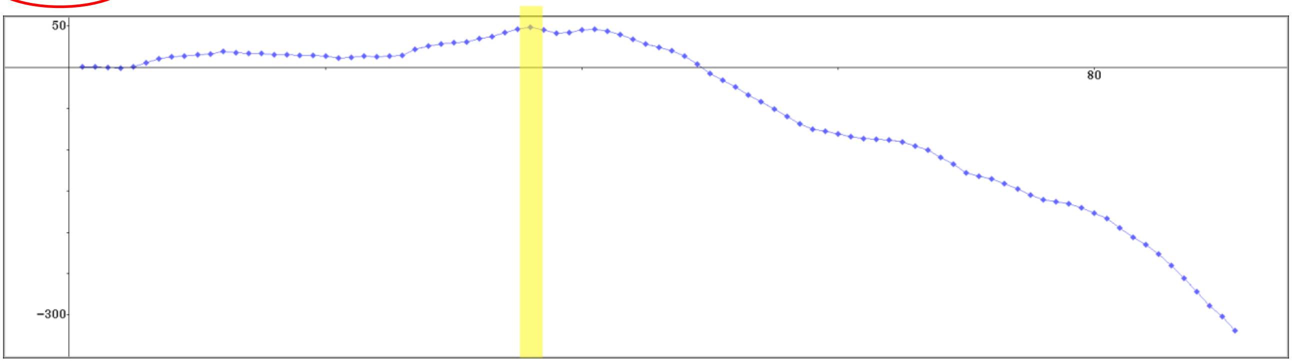
Taulukkosovelluksessa lasketaan valmiin tilaston keskiarvojen viereen uusi sarake ”Lämpösumma”, jonka arvot saadaan lisäämällä aina uuden päivän keskilämpötila edellisten päivien keskilämpötilojen summaan. Alussa E2=D2 ja siitä alaspäin E3=E2+D3 ja E4=E3+D4, jne. Kaava voidaan kopioida ja liittää suoraan kaikkiin soluihin E4:E92, jolloin turhalta kirjoittamiselta vältytään.

Lasketaan lämpösummat sisältävän sarakkeen E suurin arvo soluun F2 kaavalla F2=max(E2:E92) nopeuttamaan suurimman arvon löytämistä. Suurin arvo on 48,4° ja silloin oli 6.10.2021 (rivi 37 valmiiksi annetussa aineistossa). Talvi alkoi siis 7.10.2021.

Ohessa esimerkki lämpösumman laskemisesta ja sen suurimmasta arvosta sekä lämpösumman kuvaaja.

	A	B	C	D	E	F
1	Vuosi	Kuukausi	Päivämäärä	Ilman lämpötila ...	Lämpösumma	
2	2021	9	1	0.5	0.5	
3	2021	9	2	0.2	0.7	
4	2021	9	3	-1.1	-0.4	
5	2021	9	4	-0.8	-1.2	
6	2021	9	5	1.8	0.6	
7	2021	9	6	4.6	5.2	
8	2021	9	7	5	10.2	
9	2021	9	8	2.2	12.4	
10	2021	9	9	1.4	13.8	
11	2021	9	10	1	14.8	
12	2021	9	11	1.1	15.9	
13	2021	9	12	3.3	19.2	
14	2021	9	13	-1.2	18	
15	2021	9	14	-0.8	17.2	
16	2021	9	15	-0.7	16.5	
17	2021	9	16	-1.4	15.1	
18	2021	9	17	-0.1	15	
19	2021	9	18	-0.7	14.3	
20	2021	9	19	-0.2	14.1	

=E2+D3



	A	B	C	D	E	F	G	H
30	2021	9	29	2.5	28.6			
31	2021	9	30	1.2	29.8			
32	2021	10	1	0.7	30.5			
33	2021	10	2	4.1	34.6			
34	2021	10	3	2.4	37			
35	2021	10	4	5	42			
36	2021	10	5	3.7	45.7			
37	2021	10	6	2.7	48.4	Suurin arvo lämpösummalla		
38	2021	10	7	-2.8	45.6			
39	2021	10	8	-4.6	41			
40	2021	10	9	0.8	41.8			
41	2021	10	10	3.2	45			
42	2021	10	11	0.7	45.7			
43	2021	10	12	-1.8	43.9			
44	2021	10	13	-4.2	39.7			
45	2021	10	14	-5.8	33.9			

=E36+D37

11. Suhteellinen vaalitapa 18 p.

Aineisto

11.A Taulukko: Äänestystulokset

11.B Teksti: D'Hondtin suhteellinen vaalitapa

11.A Taulukko: Äänestystulokset

Ehdokas	Puolue	Äänet
Frodo	Hobittipuolue	34320
Sam	Hobittipuolue	11029
Pippin	Hobittipuolue	8867
Merri	Hobittipuolue	6660
Bilbo	Hobittipuolue	3162
Aragorn	Ihmispuolue	61203
Boromir	Ihmispuolue	4650
Sauron	Ihmispuolue	17
Galadriel	Haltiapuolue	10221
Legolas	Haltiapuolue	6790
Annatar	Haltiapuolue	4923
Gimli	Kääpiöpuolue	19034
Gloin	Kääpiöpuolue	2589

11.B Teksti: D'Hondtin suhteellinen vaalitapa

1. Lasketaan kunkin puolueen saama kokonaisäänimäärä vaalipiirissä.
2. Kussakin puolueessa ehdokkaat laitetaan järjestykseen henkilökohtaisen äänimäärän perusteella.
3. Kullekin ehdokkaalle lasketaan vertausluku siten, että puolueestaan eniten ääniä saanut ehdokas saa vertausluvukseen puolueen koko äänimäärän, toiseksi eniten ääniä saanut saa vertausluvukseen puolet puolueen äänimäärästä, kolmanneksi eniten ääniä saanut saa vertausluvukseen kolmasosan puolueen äänimäärästä ja niin edelleen.
4. Vaalipiirin kaikki ehdokkaat laitetaan vertauslukujen mukaiseen järjestykseen.
5. Jos vaalipiiristä valitaan n ehdokasta, niin valituiksi tulevat ne, joilla on n suurinta vertauslukua. Tasatilanteessa valittava arvotaan.

Lähde: YTL.

Kuvitteellisessa Keski-Maan vaalipiirissä on neljä puoluetta: Hobittipuolue, Ihmispuolue, Haltiapuolue ja Kääpiöpuolue. Taulukossa 11.A on esitetty Keski-Maassa toimitetun vaalin äänestystulokset.

Vastaa seuraaviin kysymyksiin olettaen, että Keski-Maassa käytetään d'Hondtin suhteellista vaalitapaa, joka on kuvattu tekstissä 11.B.

1. Mikä oli vaalien äänestysprosentti, kun Keski-Maassa on 290 754 äänioikeutettua? **(3 p.)**
2. Laske kunkin ehdokkaan vertausluku. Ketkä tulevat valituiksi, kun vaalipiiristä valitaan viisi edustajaa? **(5 p.)**
3. Kuinka monta henkilökohtaista ääntä enemmän Pippinin olisi pitänyt saada, jotta hän olisi tullut valituksi ilman arvontaa? Oletetaan, että muiden äänimäärät eivät muutu. **(5 p.)**
4. Suhteellisen vaalitavan tavoite on, että edustajien paikat jakautuvat samassa suhteessa kuin puolueiden saamat äänet. Pohdi, kuinka hyvin tämä toteutui näissä vaaleissa. **(5 p.)**

1. Jaetaan annettujen äänten määrä äänioikeutettujen määrällä

$$\frac{34320+11029+8867+6660+3162+61203+4650+17+10221+6790+4923+19034+2589}{290754}$$

$$\frac{173465}{290754}$$

$$\frac{173465}{290754}$$

0.596604002

Äänestysprosentti oli n. 60%.

2. Hobittipuoluetta äänesti

34320+11029+8867+6660+3162

64038

, Ihmispuoluetta

61203+4650+17

65870

, Haltiapuoluetta

10221+6790+4923

21934

ja Kääpiopuoluetta

19034+2589

21623

Vertausluvut puolueittain saadaan jakamalla puolueen äänisaalis ehdokkaan sijaluvulla.
Hobittipuolue: Frodo 64038, Sam 64038/2=32019, Pippin 64038/3=21346, Merri 64038/4=16009,5 ja Bilbo 64038/5≈12807,6.
Ihmispuolue: Aragorn 65870, Boromir 65870/2=32935 ja Sauron 65870/3≈21956,7.
Haltiapuolue: Galadriel 21934, Legolas 21934/2=10967 ja Annatar 21934/3≈7311,3.
Kääpiopuolue: Gimli 21623 ja Gloin 21623/2=10811,5.

Valituksi tulevat viisi suurimman vertausluvun saanutta eli järjestyksessä

1. Aragorn (65870)
2. Frodo (64038)
3. Boromir (32935)
4. Sam (32019)
5. Sauron (≈21956,7)

3. Pippin olisi tullut valituksi viiden edustajan joukkoon, jos a) hän olisi ohittanut Samin henkilökohtaisessa äänimäärässä tai b) Hobittipuolue olisi saanut yhteensä niin paljon ääniä, että Pippinin 3. sija olisi saanut suuremman vertailuluvun kuin valituksi viidennellä sijalla ollut Sauron (≈21956,7).

a) Samin ohitukseen olisi riittänyt 11029−8867+1=2163 henkilökohtaista ääntä enemmän. Tällöin Hobittipuolueen kokonaisäänimäärä olisi samalla noussut 66201:een ja se olisi ohittanut ihmispuolueen. Sekä Sam että Pippin olisivat tällöin tulleet valituiksi, sillä Samin vertausluku olisi ollut 66201/3=22067>21956,7 (Sauronin vertausluku). Sauron olisi jäänyt valitsematta.

b) Hobittipuolue olisi tarvinut 65870−64038+1=1833 ääntä lisää. Tällöin Hobittipuolueesta olisi päässyt kolme edustajaa sen ohittaessa ihmispuolueen. Pippinin ei välttämättä olisi tarvinut saada yhtään henkilökohtaista ääntä lisää, kunhan Merri vain olisi pysynyt hänen takanaan.

Esim. jos Frodo olisi saanut nuo kolmeen Hobittipuolueen edustajanpaikkaan oikeuttavat 1833 ääntä, niin puolueen kolmen valitun ehdokkaan vertausluvut olisivat olleet
Frodo 65871, Sam 65871/2=32935.5 ja Pippin 65871/3=21957>21956,7 (Sauronin vertausluku) ja Sauron olisi jäänyt valitsematta.

4. Ihmispuolue hyötyi tästä äänestystavasta, sillä suurimpana puolueena sen 3. tulleen ja hyvin vähän ääniä saaneen Sauroninkin (17 ääntä) vertausluku oli riittävän suuri valituksi tulemiseen. Näin viidestä valitusta peräti kolme oli Ihmispuolueesta eli Ihmispuolue sai 60% edustuksen, vaikka sitä äänesti 100*65870/173465≈38% äänestäjistä.

Jos valittujen määrä olisi perustunut absoluuttiseen äänimäärään, niin viiden eniten ääniä saaneen joukkoon olisi sopinut vain yksi Ihmispuolueen jäsen Aragorn.

Hobittipuolue sai kaksi edustajaa eli 40% edustuspaikoista ja heidän puoluettaan äänesti 100*64038/173465≈37% äänestäjistä. Suhteellinen vaalitapa oli hyvin lähellä tavoitettaan.

Haltiapuolue sai 100*21934/173465≈13% äänistä eikä yhtään edustuspaikkaa. Heidän puolueensa olisi tarvinut vain 23 ääntä enemmän yhden ehdokkaan valituksi tulemiseen, sillä Galadrielin vertausluku 21934 olisi noussut 21957:ään ja sillä hän olisi ohittanut Sauronin Ihmispuolueesta.

Kääpiöpuolueen Gimli oli koko vaalien kolmanneksi eniten ääniä saanut ehdokas 19034 äänellään. Silti puolueen kokonaisäänimäärä oli sen verran alhainen, ettei Gimli tullut valituksi. Kääpiöpuolue olisi tarvinnut melkein 3000 ääntä enemmän, jotta Gimlin vertausluku riittänyt valintaan.